

1. Definitionen:

$$\mathbb{A} = \{a \mid a \in \mathbb{N} \wedge a = 2n-1\}$$

$$\mathbb{X} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x = 2^{n-1}\}$$

$$\mathbb{D} = \{d \mid d \in \mathbb{N}_{\text{even}} \wedge d \equiv 1 \pmod{3}\}$$

$$\mathbb{P} = \{p \mid p \in \mathbb{N} \wedge p \text{ ist Primzahl}\}$$

$$f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{D}, a \mapsto 3a+1$$

$$f^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{A}, d \mapsto (d-1)/3$$

$$g: \mathbb{N}_{\text{even}} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n/2$$

$$g^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_{\text{even}}, n \mapsto 2n$$

1.1 Wichtig:

$$1.1.1 \quad \forall d \in \mathbb{D} \exists! a \in \mathbb{A}: d = f(a)$$

$$1.1.2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \exists! n \in \mathbb{N}_{\text{even}}: n = g(n)$$

$$1.1.3 \quad \forall n \in \mathbb{N}: n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k} \mid p_j \in \mathbb{P}, r_j \in \mathbb{N}_0 \text{ kurz } n = \prod p_j^{r_j}$$

2. Struktur:

$\mathbb{N}$ wird in $|\mathbb{A}|$ disjunkte Mengen

$$\mathbb{X}_{a_i} = \{a_i x \mid a_i \in \mathbb{A}, x \in \mathbb{X}\}$$

aufgeteilt, d.h. genau eine Teilmenge $\mathbb{X}_{a_i}$ für jedes $a_i \in \mathbb{A}$.

Deren Elemente werden nach ihrem Betrag sortiert und bilden so die Folgen

$$(a_i \cdot 1, a_i \cdot 2, a_i \cdot 4, a_i \cdot 8, \dots) \text{ kurz } (a_i \cdot 2^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$$

Jede dieser Folgen wird in einer Zeile v.l.n.r. angeordnet. Die Wurzel der Struktur ist die Folge zu $\mathbb{X}_1$ (1, 2, 4, 8, ...). Immer wenn für ein Glied n in einer Zeile $n \in \mathbb{D}$ gilt, beginnt nach rechts verschoben direkt unterhalb dieser Stelle die Zeile mit dem Startwert $a_i = f^{-1}(n)$, ebenfalls in der Form $(a_i \cdot 2^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$. Der Aufbau kann auch spalten- und zeilenweise rekursiv beginnend bei 1 erfolgen. Die Struktur bleibt dabei vollständig, d.h. alle $n \in \mathbb{N}$ sind in der Struktur enthalten.

3. Der Weg der Collatz-Funktion von jeder Zahl zur 1:

Die iterative Collatz-Funktion „bewegt“ sich in jeder Zeile mit $g(n)$ nach links, solange ihr Wert gerade ist. Am Zeilenanfang a_i springt sie mit $f(n)$ nach oben in die „übergeordnete“ Zeile.

Das oft beklagte chaotische und unberechenbare Verhalten der Collatz-Funktion wird durch die Struktur dieser Anordnung vollständig kompensiert und gehört der Vergangenheit an. Die Collatz-Funktion strebt Schritt für Schritt vorhersehbar für jede beliebige Startzahl gegen 1.

Behauptung:

Jede natürliche Zahl ist Teil dieser Struktur. Daher führt jeder Startwert zur 1.

Es gibt keine Zahl $n \in \mathbb{X}_{a_i} : a_i > 1$, die in einen Zyklus führt oder ins Unendliche wächst.

Bei Erreichen der 1 halten wir an. Der triviale Zyklus $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$ soll hier nicht weiter berücksichtigt werden.

Argumentation:

● Vollständigkeit

Jede natürliche Zahl ist genau einmal in dieser Struktur enthalten.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen kann auch notiert werden als:

$$\mathbb{N} = \{n \mid n = ax, a \in \mathbb{A}, x \in \mathbb{X}\}$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus 1.1.3 und der Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{N}$.

Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gehört nur zu genau einer Folge $(a_i \cdot 2^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$, denn die Mengen $\mathbb{X}_{a_i} = \{a_i \cdot 2^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{A}, n \in \mathbb{N}\}$ sind disjunkt.

Da $f(a)$ bijektiv ist (1.1.1), ist auch $f^{-1}(d)$ bijektiv: Zu jedem $d \in \mathbb{D}$ existiert genau ein $a_i \in \mathbb{A}$ und es kann wegen

$$2 \cdot a_i < 3 \cdot a_i + 1 < 4 \cdot a_i$$

keine Selbstabbildung in $\mathbb{X}_{a_i}$ für alle $a_i > 1$ geben.

● Keine Schleifen:

Da Bewegungen nur nach links und am Zeilenanfang nur nach oben möglich sind und eine Selbstabbildung in $\mathbb{X}_{a_i}$ für $a_i > 1$ nicht möglich ist, kann keine Schleife außer der $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$ in $\mathbb{X}_1$ entstehen.

Es können auch keine Schleifen über mehrere Zeilen in der Form $a_i \rightarrow a_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow a_{i+n} \rightarrow a_i$ entstehen, da die Bijektivität von $f(a)$ sicherstellt, dass sowohl jedes $d \in \mathbb{D}$ als auch jedes $a_i \in \mathbb{A}$ nur genau einmal in der Struktur auftreten.

● Ausschluss der Divergenz durch strukturelle Induktion:

Eine beliebige Zahl n führt zur 1. Alle in der Struktur folgenden Zahlen $[g^{-1}(n)$ und falls $n \in \mathbb{D}$ $f^{-1}(n)]$ führen ebenfalls zur 1. Daraus folgt, dass alle Elemente der Struktur zur 1 führen.

Ein „Entkommen nach oben“ ist daher strukturbedingt ausgeschlossen.

Schlussfolgerung:

Durch diese vollständige und gerichtete Anordnung ist jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ erfasst und führt nach einer abzählbaren Anzahl von Schritten zur 1.

Die hier vorgestellte Struktur liefert ein vollständiges und konsistentes Modell, das alle bekannten Eigenschaften der Collatz-Funktion erklärt und stützt.

Strukturelle Induktion

Ein Beweisversuch über die klassische vollständige Induktion (von $n \rightarrow n+1$) stößt bei der Collatz-Funktion sofort auf Schwierigkeiten: Das Verhalten der Collatz-Funktion für $n+1$ hängt nicht systematisch vom Verhalten für n ab. Beispielsweise kann n bereits nach wenigen Schritten zur 1 führen, während $n+1$ zunächst in große Werte springt, bevor die Folge wieder abfällt.

Stattdessen bietet sich eine strukturelle Induktion an, die der Anordnung der Zahlen in der vorgestellten Struktur folgt:

- Wir führen eine logische Eigenschaft $C(n)$ für jede Zahl n ein. Diese Eigenschaft sagt aus: die Zahl n ist 1 oder führt nach iterativer Anwendung der Collatz-Funktion zur 1.
- Ist $C(n)$ bekannt, dann gilt dies auch für alle über g^{-1} bzw. f^{-1} folgenden Zahlen, denn diese Funktionen vererben die Eigenschaft $C(n)$ auf die in der Struktur folgenden Zahlen.
- Da die Struktur alle $n \in \mathbb{N}$ umfasst, ist $C(n)$ für alle n bekannt.

Vollständigkeit der Struktur

Die Abbildung $f(n)$ ebenso wie ihre Umkehrabbildung $f^{-1}(n)$ bijektiv und es gilt $2 \cdot a < 3 \cdot a + 1 < 4 \cdot a$ für alle $a > 1$.

Daher ist ausgeschlossen, dass eine ungerade Zahl a_i oder eine der über $g^{-1}(n)$ folgenden nicht Teil dieser Struktur sind.

Zu jeder ungeraden Zahl a existiert eine gerade Zahl $d = f(a)$, die auch in der Form $2^n \cdot a'$ dargestellt werden kann. Rekursiv gelangen wir so immer von einem a zum nächsten »übergeordneten« a' . Diese Rekursion „endet“ erst in der Schleife der ersten Zeile der Struktur mit $a = 1$.

Ausschluss der Divergenz – ein Gedankenexperiment mit der Robo-Maus „Klara“

Um die strukturbedingte Unmöglichkeit einer Divergenz anschaulich zu machen, ersetzen wir jedes Element der Struktur durch eine Sphäre. Diese Sphären sind über gerade Kegelstümpfe verbunden, wobei die große Öffnung zu dem aktuellen Wert und die kleine Öffnung zum nächsten Wert einer Collatz-Folge gehört.

- Jede Sphäre besitzt mindestens zwei Öffnungen: eine große und eine kleine.
- Sphären, die Zielwerten der Abbildung $f(a)$ entsprechen, besitzen zusätzlich eine zweite kleine Öffnung.

Nachdem wir alle Zahlen durch Sphären ersetzt haben setzen wir Klara irgendwo in der Struktur aus. Klara ist faul: anstatt sich in enge Öffnungen zu zwängen kriecht sie immer in die größte Öffnung, die sie findet. Da jede große Öffnung nur in Richtung einer kleineren Öffnung führt, folgt Klara automatisch dem Verlauf der Collatz-Funktion.

Wichtig: In dieser Konstruktion gibt es keinen Weg zurück zu einer größeren Öffnung, außer im bekannten Zyklus $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$. Definiert man die Sphäre „1“ zusätzlich als Senke (ohne große Öffnung), dann landet Klara dort endgültig.

Klara durchläuft die Struktur ausschließlich entlang der großen Öffnungen und gelangt so deterministisch von einer Sphäre zur nächsten. Dieser Prozess ist unabhängig von konkreten Zahlenwerten – die Struktur allein bestimmt den Weg.

[Hier die rekursive Erstellung der Struktur](#)

[Makro zur rekursiven Erstellung der Struktur](#)

[Hier ein größerer Ausschnitt aus der Struktur](#)